

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ
КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП (ЖҰҒУ
ШЕТТІК ШАРТЫМЕН). ӘЛДІ ШЕШІМНІҢ БАР БОЛУЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

24 қазан 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің (жұғу шеттік шартымен) әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығын дәлеледеу

Негізгі сұрақтар:

- 1 Жұғу шеттік шарттарына қатысты математикалық өрнектер: кеңістіктер, теңсіздіктер, операторлар
- 2 Сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің (жұғу шеттік шартымен) әлді шешімінің бар болуы
- 3 Сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепте (жұғу шеттік шартымен) қысымды кері қайтару



Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4)$$

жұғу шекаралық шартын $[1, 2, 3]$ және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \omega d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық,



мұндағы $\mathbf{u}_n$ — $\partial\Omega$ беті бойынша $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ векторының нормаль компоненті, ал $\mathbf{n}$ — $\partial\Omega$ бетіне түсірген сыртқы бірлік нормаль вектор. Сонымен қатар, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ — сұйықтықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтықтың қысымы болып табылады, ал ν және χ оң коэффициенттері, сәйкесінше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы және релаксациясын, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясындағы $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\omega(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.



A.A. Kotsiolis, A.P. Oskolkov.

The initial boundary value problem with a free surface condition for the ε -approximations of the Navier–Stokes equations and some of their regularizations, 80(3) (1996) 1773–1801.



A.P. Oskolkov.

Initial boundary-value problems with a free surface condition for the modified Navier-Stokes equations, J. Math. Sci. 84 (1997) 873–887.



A.P. Oskolkov.

Nonlocal problems for the equations of Kelvin-Voigt fluids and their ε -approximations in classes of smooth functions, Journal of Mathematical Sciences, 91(2) (1998), 2840–2859.



Енді (4) жұғу шекаралық шартына қатысты келесі функционалдық кеңістіктерді енгізейік ([1] қараңыз):

$$\mathbf{H}_n(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}_n|_{\partial\Omega} = 0\};$$

$$\mathbf{H}_n^1(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}_n|_{\partial\Omega} = 0\};$$

$$\mathbf{H}_n^2(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega) : (\operatorname{curl} \mathbf{v} \times \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}$$

және ықшам түрде жазуға төмендегі жалпылама белгілеулер қолданылады

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \{ \mathbf{H}_n(\Omega), (4), \text{ шекаралық шарт үшін}, \\ \mathbf{V}^i &:= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_n^i(\Omega), (4), \text{ шекаралық шарт үшін}, i = 1, 2. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6)$$



O.A. Ladyzhenskaya.

n the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897.



Ал $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ кеңістігінде скалярлық көбейтінді мен норма, сәйкесінше, $(\operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{2,\Omega}$ және $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_n^1(\Omega)} := \|\operatorname{curl} \mathbf{v}\|_{2,\Omega}$ өрнектерімен анықталады. Сондай-ақ, [1] еңбектерде және оларда келтірілген сілтемелерге сәйкес (мысалы, [2] қараңыз) кез келген $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ функциясы үшін $(\mathbf{H}(\Omega))$ кеңістігі Навье-Стокс теңдеулері теориясынан белгілі) классикалық Ладыженская және Пуанкаре теңсіздіктері келесі түрге ие :

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C_1(\Omega) \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega); \quad (7)$$

$$N_1(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)} \leq \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq N_2(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n(\Omega); \quad (8)$$

$$N_3(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)} \leq \|\Delta \mathbf{u}\|_{2,\Omega} = \|\operatorname{curl}^2 \mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq N_4(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^2(\Omega); \quad (9)$$



O.A. Ladyzhenskaya.

An the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897.



J.M. Ghidaglia.

Regularite des solutions des certain problemes aux limites lineaires lies aux equations d'Euler, Comm. Part. Diff. Equations. 9 (1984) 1265-1298.



Ладыженская теңсіздіктері [2]

$$\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega}^4 \leq 2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 ; \quad (10)$$

$d = 2$ кезінде, және

$$\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega}^4 \leq (4/3)^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^3 ; \quad (11)$$

$d = 3$ кезінде, және

$$\|\mathbf{u}\|_{6,\Omega} \leq (48)^{\frac{1}{6}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}, \quad d = 3. \quad (12)$$

Енді $-\Delta$ операторымен байланысты $\mathbf{H}^1$ кеңістігінде $\mathbf{a}$ бисызықты және үзіліссіз формасын енгізейік:

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \{ (\operatorname{curl} \mathbf{v}, \operatorname{curl} \mathbf{u})_{2,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega), \quad (4) \text{ шарт үшін} \quad (13)$$



O.A. Ladyzhenskaya.

The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970.



Соболев кеңістіктері теориясынан $\mathbf{H}^1(\Omega)$ және $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ кеңістіктерінің нормалары эквивалентті екені анық, яғни $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$. Сондай-ақ, Фридрихс теңсіздігі мен (8) өрнегінен $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ және $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ кеңістіктерінің, сәйкесінше, $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_n^1(\Omega)} = \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ және $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ нормалары эквивалентті аңғаруға болады.

Осылайша, $\mathbf{a}$ бисызықты формасы $\mathbf{H}^1(\Omega)$ кеңістігінен $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ кеңістігіне әсер ететін A изоморфизмін анықтайды,

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (14)$$

мұндағы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — $\mathbf{H}^1(\Omega)$ және $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы. Сонымен қатар, келесі үзіліссіз енгізулер орынды

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \quad (15)$$

мұндағы алғашқы екі кеңістіктің әрқайсысы келесіде тығыз.



Демек, (9) өрнектен $H_n^2(\Omega)$ және $W^{2,2}(\Omega)$ кеңістіктерінің, сәйкесінше, $\|\Delta u\|_{2,\Omega} = \|\text{curl}^2 u\|_{2,\Omega}$ және $\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ нормалары эквиваленттілігі тұжырымдалады. Сондай-ақ, (4) жұғу шекаралық шартынан $d = 3$ және $d = 2$ жағдайда, сәйкесінше,

$$\begin{aligned} (-\Delta v, u)_{2,\Omega} &= -(\nabla \text{div } v, u)_{2,\Omega} + (\text{curl}^2 v, u)_{2,\Omega} = \\ &= - \int_{\partial\Omega} \text{div } v \cdot u_n dS + (\text{div } v, \text{div } u)_{2,\Omega} + \int_{\partial\Omega} u \cdot (\text{curl } v \times n) dS + \\ &+ (\text{curl } v, \text{curl } u)_{2,\Omega} = (\text{curl } v, \text{curl } u)_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (16)$$

және

$$\begin{aligned} (-\Delta v, u)_{2,\Omega} &= (\text{div } v, \text{div } u)_{2,\Omega} + (\overline{\text{curl}}(\text{curl } v), u)_{2,\Omega} = \\ &= \int_{\partial\Omega} (\text{curl } v \times n) u dS + (\text{curl } v, \text{curl } u)_{2,\Omega} = (\text{curl } v, \text{curl } u)_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (17)$$

Грин формулалары ([1] қараңыз) орынды, мұндағы $\overline{\text{curl}} \varphi$ — φ функциясы үшін $(\varphi_{x_2}, -\varphi_{x_1})_{2,\Omega}$ өрнекпен анықталған вектор.



O.A. Ladyzhenskaya.

An the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897.



Definition

(1)-(5) кері есебі жалпылама әлді шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^2(\Omega)), \mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^2(\Omega)), f(t) \in L^2[0, T];$
- 2 Әрбір теңдеуді сәйкес функционалдық кластарда жалпылама функция мағынасында қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (2) теңдеуден жалғыз түрде қалпына келтіруге болады.



Кері есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^1(\Omega); \quad (18)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \omega)_{2,\Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (19)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (20)$$

$$\omega(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^1(\Omega), \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (21)$$

$$(\mathbf{u}_0, \omega)_{2,\Omega} = e(0); \quad (22)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (23)$$



Енді (1) теңдеуді $\omega(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (5) қосымша және (19) шартты қолданғанда, онда $f(t)$ функциясы табылады

$$f(t) = \frac{1}{g_0(t)} (e'(t) + \kappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u})_{2, \Omega} + \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) ds) . \quad (24)$$

Демек, (24) өрнекті (1) теңдеуге қойғанда, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = F(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (25)$$

теңдеулер жүйесін, (3) бастапқы шартты және (4) шекаралық шартты қанағаттандыратын локалды емес тура есеп тұжырымдалады, мұндағы $F(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (24) өрнекпен анықталады. Демек, (1)-(5) кері есебі (25), (3), (4) локалды емес тура есебінің алып келдік.



Кері есептер мен локалды емес тура есептердің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Lemma

Айталық, (19)-(22) шарттар орындалсын. Демек, (1)-(5) кері есебі (25), (3), (4) локалды емес тура есебінің эквивалентті, яғни (1)-(5) кері есебінің (u, p, f) шешімінің (u, p) жұбы (25), (3), (4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, (25), (3), (4) локалды емес тура есебінің (u, p) шешімі (24) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1)-(5) кері есебінің шешімі болып табылады.

(25), (3), (4) локалды емес тура есебінің әлді шешімінің анықтамасы 1-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.



Theorem

Айталық, әлсіз шешімнің бар болуы туралы теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шартты орынды болсын

$$u_0(x) \in V^1(\Omega) \cap V^2(\Omega). \quad (26)$$

Олай болса, (25), (3), (4) локалды емес тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір жалпылама $(u(x, t), p(x, t))$ әлді шешімі бар болады. Сонымен қатар, (1)-(5) кері есебінің де кемінде бір жалпылама әлді шешімі бар болады және келесі априорлық бағалауларды қанағаттандырады

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_1; V^1 \cap V^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T_1; V^1 \cap V^2(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (27)$$

мұндағы T_1 мәні 8-дәрістен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.



Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (25), (3), (4) локалды емес тура есеп үшін

$$\mathbb{A}\varphi_k := -\Delta\varphi_k = -\mathbf{curl} \mathbf{curl}\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k \in \mathbf{H}_n^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_n^2(\Omega) \quad (28)$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады. Ескерер жәйт, $\varphi \in \mathbf{H}_n^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_n^2(\Omega)$ және $p \in W^{1,2}(\Omega)$ функциялары мен $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}_n(\Omega) \oplus \mathbf{G}(\Omega)$ жіктеуінен[1]

$$(\Delta\varphi, \nabla p)_{2,\Omega} = 0$$

тұжырымы орынды. Сондай-ақ, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $\mathbf{V}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{V}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды[1], [2].



O.A. Ladyzhenskaya.

An the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897.



O.A. Ladyzhenskaya.

The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970.



Олай болса, ең алдымен (1)-(5) кері есебінің әлді шешімінің бар болуы аналогты түрде дәлелденеді. Әлсіз шешім үшін алынған барлық априорлық бағалаулар әлді шешімге де орынды. 3-Теореманы толық дәлелдеу үшін Δu^n мен Δu_t^n —ға априорлық бағалаулар алсақ жеткілікті.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

